离散数学

第十一章: 组合计数

卢杨

厦门大学信息学院计算机科学与技术系

luyang@xmu.edu.cn

组合计数

- 组合数学的一个重要的研究领域是组合计数，它在算法的设计与分析中有着重要的应用.
- 最基本的组合数学的思想和枚举的方法在古老时代就已经出现.
  - 公元前6世纪的古印度外科医生妙闻已经指出可以由6个相异的味道组合出63种相异的结果.
- 公元850年的印度数学家Mahāvīra提供了关于排列数与组合的公式, 甚至可能早在6世纪印度的数学家就对这些公式熟悉.
- 在20世纪下半叶，组合数学成长相当快速，甚至出现数十种新的期刊和会议．在某种程度上，这样的成长是由对其他领域的连结与应用所带动, 包括代数, 概率论, 泛函分析和数论等.

11.1 排列与组合

加法法则

加法法则

事件A有m种产生方式，事件B有n种产生方式，则事件“A或B”有$m+n$种产生方式.

- 加法法则的使用条件是：事件A与B产生的方式是**不重叠的**. 如果有某种产生方式既是事件A的产生方式，也是事件B的产生方式, 那么事件“A或B”的产生方式数不等于$m+n$.
- 加法法则可以推广到k种事件的情况，即：事件A_1有n_1种产生方式, 事件A_2有n_2种产生方式,…, 事件A_k有n_k种产生方式, 则事件“A_1或A_2或…A_k”有$n_1+n_2+\cdots+n_k$种产生的方式.

加法法则

例 汽车市场有10款轿车, 7款SUV, 从市场中只购买一辆车, 有多少种购买方式?

解 这里用到了加法原则, 如果只能买一辆车的话, 两种车只能买一种, 两个事件是不能重叠的. 因此一共$10 + 7$种购买方式.

例 汽车市场有10款轿车, 3款奥迪, 从市场中只购买一辆车, 有多少种购买方式?

解 这里两种车可能是有重叠的, 例如买了A4L相当于既买了奥迪又买了轿车, 因此无法使用加法原则.

乘法法则

乘法法则

事件A有m种产生方式，事件B有n种产生方式，则事件“A与B”有mn种产生方式.

- 乘法法则的使用条件是: 事件A与B产生的方式是相互独立的. 如果事件A的产生方式和事件B的产生方式是相互影响的，那么事件“A与B”的产生方式数不等于mn.
- 乘法法则可以推广到k种事件的情况，即：事件A_1有n_1种产生方式, 事件A_2有n_2种产生方式,…, 事件A_k有n_k种产生方式, 则事件“A_1与A_2与…A_k”有$n_1 n_2 \ldots n_k$种产生的方式.

乘法法则

例 11.1 设A, B, C是3个城市, 从A到B有3条道路, 从B到C有2条道路, 从A直接到C有4条道路, 问从A到C有多少种不同的方式?

解 将从A到C的道路分成两类: 经过B的与不经过B的. 把经过B的道路分成两步选择:

- 先选从A到B的, 有3种; 再选从B到C的, 有2种, 根据乘法法则, 经过B的道路有$3×2 = 6$条.
- 而从A直接到C的有4条, 再使用加法法则, 不同的方式数是:

$$3×2 + 4 = 10$$

乘法法则

例 一个大学生每天白天可进行的活动有上课，运动，社团活动会，晚上可进行的活动有自习，娱乐，约会. 但是如果白天上课了，晚上就需要适当放松一下. 那么这个大学生的一天有几种过法?

解 由于白天上课和晚上自习这两个事件**不是独立的**，晚上是否上自习与白天是否有课相关. 因此无法使用乘法法则. 需要进行分类讨论:

- 白天不上课: 白天2种过法×晚上3种过法=6种;
- 白天上课: 白天1种过法×晚上2种过法=2种.
- 共计8种，小于乘法法则得到的$3\times3 = 9$种.

加法法则和乘法法则

- 加法法则的本质是分类选取: 将所有的选法分成若干类, 只能选其中一类, 各类选法互不重叠, 分别计数每类的选法个数, 然后使用加法法则.
- 乘法法则的本质是分步选取: 将选择过程分成若干步, 每步都必须要进行, 而且选择彼此独立, 分别计数每步的选择数目, 然后使用乘法法则.
- 上例中先把从A到C的道路根据是否经过B分成两类, 对于经过B的道路再分A到B和B到C两段进行分步选取.

计数公式

- 集合的排列与组合是不允许重复选取的基本计数模型.

定义 11.1

设S是n元集.

(1) 从S中有序选取的r个元素称为S的一个r排列，S的不同r排列总数记作$P(n,r)$. $r=n$的排列称作S的全排列，或简称为S的排列.

(2) 从S中无序选取的r个元素称为S的一个r组合，S的所有r组合的总数记作$C(n,r)$.

计数公式

定理 11.1

设n, r为自然数, 规定$0! = 1$, 则

$$(1)\ P(n,r) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-r)!} & n \geq r \\ 0 & n < r \end{cases}$$

$$(2)\ C(n,r) = \begin{cases} \frac{P(n,r)}{r!} & n \geq r \\ 0 & n < r \end{cases}$$

计数公式

证明 若$n < r$, 显然不存在S的r排列和r组合. 只需要考虑$n \geq r$的情况.

(1) 从S中选择排列的第一个元素有n种选法, 从剩下的$n-1$个中选择第二个元素有$n-1$种选法. 类似地, 第r个元素有$n-r+1$种.

每种选择之间相互独立, 根据乘法法则, 总选法数为

$$P(n,r) = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}.$$

(2) 分两步构成r排列, 先从S中选出r个元素有$C(n,r)$种方法, 然后对这r个元素做全排列有$r!$种方法.

这两种方法之间相互独立, 根据乘法法则, r排列的选法数为

$$P(n,r) = C(n,r) \cdot r!$$

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!}$$

计数公式

推论

元素依次排成一个圆环的排列称为**环排列**，n元集S的r环排列数是$P(n,r)/r$.
当$r=n$时, S的环排列数为$(n-1)!$.

证明 对于每个r环排列$a_1, a_2, \ldots, a_r$, 如果从两个相邻元素之间断开, 就得到普通的r排列.

因为断开的位置有r种，r个不同r排列对应同一个环排列，于是r环排列数为$P(n,r)/r$.

当$r=n$时, S的换排列数为$\frac{P(n,n)}{n}=\frac{n!}{n}=(n-1)!$.

- 环排列的本质就是谁打头都一样, r排列中共有r种不同的打头方式, 所以除以r.

计数公式

例 11.2 (1) 10个男孩与5个女孩站成一排, 如果没有女孩相邻有多少种排法? 如果排成一个圆圈且没有女孩相邻, 问有多少种方法?

解 分步选取. 先对10个男孩做全排列$P(10,10)$.

然后再把女孩塞到男孩的间隔中, 共11个位置, 其中选出5个位置, 方法数是$P(11,5)$. 根据乘法法则可得:

$$P(10,10)\times P(11,5) = 10!\times\frac{11!}{6!}$$

排成一个圆圈就是环排列，先对10个男孩做环排列得$P(10,10)/10$. 此时只有10个间隔, 其中选出5个是$P(10,5)$. 根据乘法法则可得:

$$\frac{P(10,10)}{10}\times P(10,5) = 9!\times\frac{10!}{5!}$$

计数公式

例 11.2 (2) 从$1,2,\ldots,300$中任取3个不同的数使得其和能被3整除，问有多少种方法?

解 将集合$\{1,2,\ldots,300\}$按照除以3的余数分为A，B，C三个子集，其中

$$A=\{3,6,9,\ldots,300\}, B=\{1,4,7,\ldots,298\}, C=\{2,5,8,\ldots,299\}$$

若使得选出的3个数i,j,k之和能被3整除，只有2种选法:

- 3个数取自同一子集: 根据加法法则，方法数为$3C(100,3)$.
- 3个数分别取自不同的子集: 根据乘法法则，方法数为100^3.

最后再使用加法法则得到$3C(100,3)+100^3=1485100$.

计数公式

例 11.3 (1) 设S为3元集, S上可以定义多少个不同的二元运算和一元运算? 其中有多少个二元运算是可交换的? 有多少个二元运算是幂等的? 有多少个二元运算是可交换并且幂等的?

解

- 3元集上的二元运算的运算表有9个位置, 每个位置可以选择3种值, 根据乘法法则有$3^9 = 19683$个二元运算.
- 一元运算表只有3个位置, 于是有$3^3 = 27$个一元运算.
- 可交换的二元运算表除了主对角线元素之外, 其他元素关于主对角线成对称分布, 因此能独立取值的位置只有运算表上半三角的3个位置和对角线的3个位置, 共6个位置, 于是有$3^6 = 729$个可交换的二元运算.
- 幂等的二元运算表中的主对角线是确定的, 其余6个位置可以独立取值, 于是有$3^6 = 729$个幂等的二元运算.
- 可交换且幂等的二元运算表中可独立选择的只剩下3个, 于是有$3^3 = 27$个.

计数公式

例 11.3 (2) 设S为n元集，S上可以定义多少个不同的二元运算和一元运算？其中有多少个二元运算是可交换的？有多少个二元运算是幂等的？有多少个二元运算是可交换并且幂等的？

解 和(1)用相同的分析方式.

- 二元运算有n^{n^2}个，一元运算有n^n个.
- 可交换的二元运算有$n^{n^2-\frac{n(n-1)}{2}} = n^{\frac{n^2+n}{2}}$个.
- 幂等的二元运算有n^{n^2-n}个.
- 可交换且幂等的二元运算有$n^{\frac{n^2-n}{2}}$个.

多重集的计数公式

定义

元素可以多次出现的集合成为多重集，元素a_i出现的次数叫做它的重复度，记作n_i, $n_i = 0,1,\ldots,\infty$. 含有k种元素的多重集可记作$S = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \ldots, n_k \cdot a_k\}$.

定义 11.2

(1) 从多重集$S = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \ldots, n_k \cdot a_k\}$中有序选取的$r$个元素称为$S$的一个$r$排列，当$r = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$时称作$S$的全排列，或简称为$S$的排列.

(2) 从多重集$S = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \ldots, n_k \cdot a_k\}$中无序选取的$r$个元素称为$S$的一个$r$组合.

例 多重集$S_1 = \{2 \cdot a, 1 \cdot b, 3 \cdot c\}$, 则$acab$, $abcc$是S_1的4排列, $abccca$是S_1的排列. 多重集$S_2 = \{\infty \cdot a, \infty \cdot b, \infty \cdot c\}$, 则$aa$, ab, ac, bb, ba, bc, cc, cb, ca等都是S_2的2排列.

多重集的计数公式

定理 11.2 (1)

设$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots, n_k\cdot a_k\}$是多重集，若对一切$i=1,2,\ldots,k$，有$n_i\ge r$，则$S$的$r$排列数为$k^r$.

证明

每个元素的重复度至少是r，所构造S的r排列时每个元素在每个位置都可以出现，所以每个位置都k种选法．根据乘法法则，不同的r排列有k^r个.

多重集的计数公式

定理 11.2 (2)

设$S=\{n_1\cdot a_1, n_2\cdot a_2, \ldots, n_k\cdot a_k\}$是多重集，若$n_1+n_2+\cdots+n_k=n$，则$S$的全排列数为$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$，简记为$\binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_k}$.

证明 分步处理.

- S的全排列中共有n个位置，选其中的n_1个位置放a_1，有$C(n,n_1)$种方法.
- 在剩下的$n-n_1$个位置中放n_2个a_2，有$C(n-n_1,n_2)$种方法.
- 以此类推，在放a_i时，还剩下$n-n_1-n_2-\cdots n_{i-1}$个位置，在其中放n_i个a_i，有$C(n-n_1-n_2-\cdots n_{i-1},n_i)$种方法.
- 最后，根据乘法法则有

$$C(n,n_1)C(n-n_1,n_2)\ldots C(n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1},n_k)$$
$$=\frac{n!}{(n-n_1)!\,n_1!}\frac{(n-n_1)!}{(n-n_1-n_2)!\,n_2\,!}\cdots\frac{(n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1})!}{0!\,n_k!}=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$$

多重集的计数公式

例 11.5 用多重集{1,1,2,3,3,4}中的数字能构成多少个不同的四位数?

解 所求的4位数是多重集$S = \{2\cdot 1, 1\cdot 2, 2\cdot 3, 1\cdot 4\}$的4排列. 分两步计数$S$的4排列数. 先给出$S$的所有4组合, 再对每个4组合求它的全排列.

S的4组合列出如下:

$$A = \{1,1,2,3\}, B = \{1,1,2,4\}, C = \{1,1,3,3\}, D = \{1,1,3,4\},$$
$$E = \{1,2,3,3\}, F = \{1,2,3,4\}, G = \{1,3,3,4\}, H = \{2,3,3,4\}.$$

由定理11.2, A, B, D, E, G, H的全排列数都是$4!/(1!\,1!\,2!) = 12$, C的全排列数为$4!/(2!\,2!) = 6$, F的全排列数为$4!/(1!\,1!\,1!\,1!) = 24$. 根据加法法则$12\times 6 + 6 + 23 = 102$.

- 为什么不在S上直接用定理11.2呢?

多重集的计数公式

定理 11.3

设多重集$S=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\dots,\infty\cdot a_k\}$, 则$S$的$r$组合数为$C(k+r-1,r)$.

证明

S的r组合数其实刚好等于方程$x_1+x_2+\cdots+x_k=r$的非负整数解$x_1,x_2,\ \dots,x_k$的个数. 针对每个解, 可以构造如下01序列:

$$\underbrace{1\dots1}_{x_1\text{个}1}\quad\underbrace{0}_{\text{第}1\text{个}0}\quad\underbrace{1\dots1}_{x_2\text{个}1}\quad\underbrace{0}_{\text{第}2\text{个}0}\quad\dots\quad\underbrace{0}_{\text{第}k-1\text{个}0}\quad\underbrace{1\dots1}_{x_k\text{个}1}$$

上述序列中的0把共计r个1划分成k组. 该01序列的全排列数就是非负整数解的个数, 也就是$\{(k-1)\cdot 0,r\cdot 1\}$的全排列数, 根据定理11.2有

$$\frac{(k-1+r)!}{(k-1)!\,r!}=C(k+r-1,r).$$

课堂练习

由m个A和n个B构成序列，其中m，n为正整数，$m \leq n$. 如果要求每个A后面至少跟着1个B，问有多少个不同的序列?

课堂练习

由m个A和n个B构成序列，其中m，n为正整数，$m \le n$. 如果要求每个A后面至少跟着1个B，问有多少个不同的序列?

解1 先把AB捆绑，放m个AB，只有一种方法. 然后在任两个AB之间以及最前和最后的$m+1$个空格中放置$n-m$个B. 每个位置都能放任意个B，等价于多重集$S=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\ldots,\infty\cdot a_{m+1}\}$的$n-m$组合数$C(m+1+n-m-1,n-m)=C(n,m)$.

解2 先放n个B，只有一种方法. 然后在任两个B之间以及第一个B之前的n个空格中选择m个位置放A，于是所求序列数是$C(n,m)$.

11.2 二项式定理与多项式定理

二项式系数

定义

组合数$C(n,k)$也叫做二项式系数, 可记作$\binom{n}{k}$.

- 关于组合数的公式不难证明以下结果:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, n,k \in \mathbf{N}, n \geq k$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}, n,k \in \mathbf{Z}^+, n \geq k$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}, n,k \in \mathbf{N}, n > k$$

二项式定理

定理 11.4 (二项式定理)

设n是正整数, 对一切x和y有

$$(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}.$$

二项式系数有几个重要的恒等式 (书里还有更多):

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n, n\in\mathbf{Z}^+.$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0, n\in\mathbf{Z}^+.$$

多项式定理

定理 11.5 (多项式定理)

设n是正整数, 对一切实数$x_1, x_2, \dots, x_k$有

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_k)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n_1 n_2 \dots n_k} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \dots x_k^{n_k},$$

其中求和是对满足方程$n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$的一切非负整数$n_1, n_2, \dots, n_k$.

多项式定理

证明

$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n$展开后是k^n个项（包括相同项），每项都是$x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_k^{n_k}$的形式, 其中$n_1+n_2+\cdots+n_k=n.$

为构成$x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_k^{n_k}$，需要在$n$中选$n_1$个$x_1$，然后在剩下的$n-n_1$中选$n_2$个$x_2$, 以此类推最后在$n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1}$中选择$n_k$个$x_k$.

因此$x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_k^{n_k}$的系数是

$$\binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_k}$$

多项式系数

- 二项式定理是多项式定理$k = 2$时的特殊情况. 类似于二项式系数, 可以把多项式定理中的系数$\binom{n}{n_1 n_2 \ldots n_k}$叫做多项式系数.
- 二项式系数是组合数$C(n, k)$, 而多项式系数是多重集$S = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \ldots, n_k \cdot a_k\}$的全排列数.

例 11.6 求$(2x_1 - 3x_2 + 5x_3)^6$中$x_1^3 x_2 x_3^2$项的系数.

解

$$\binom{6}{3 \cdot 1 \cdot 2} \cdot 2^3 \cdot (-3) \cdot 5^2 = \frac{6! \cdot 8 \cdot (-3) \cdot 25}{3! \cdot 1! \cdot 2!} = -36000.$$

作业

- 与下一章一起做.

谢谢

有问题欢迎随时跟我讨论